La déduction naturelle: définitions formelles

Marianna Girlando

Résumé

Notes de cours pour la séance du 14/04/2020. Les sections 1 et 2 sont très essentielles, et reportent juste les notions pour comprendre la section 3. Elles sont à intégrer avec les vidéos (lien sur l'EPI) et le chapitre 14 de [1].

1 La déduction naturelle

On va définir au même temps deux systèmes formels de déduction naturelle : **NK**, le système pour la logique classique, et **NJ**, pour la logique intuitionniste. Le trait fondamental de ces deux systèmes, introduits par Gerhard Gentzen dans [2], est le fait qu'ils n'ont *aucun* axiome, et sont composés que des règles d'inférence.

On peut définir une *logique* comme un ensemble de formules écrites dans un certain langage. Prenant la logique classique du premier ordre comme exemple, il y a différents critères (équivalents) pour déterminer quel ensemble de formules du langage $\mathcal{L}_p$ font partie de la logique. Suivant un critère *sémantique*, on peut spécifier des modèles pour $\mathcal{L}_p$, et dire que toutes les formules de la logique classique du premier ordre sont toutes les formules valides dans ces modèles. Autrement (critère *syntactique*) on peut spécifier un système formel (ici : déduction naturelle), et dire que la logique classique du premier ordre est composée de toutes les formules dérivables dans ce système. Les théorèmes de fiabilité et complétude démontrent que les deux définitions sont équivalents, c'est à dire, que une formule est dérivable si et seulement si elle est valide.

Dans la suite, on va définir formellement la notion de dérivation et la relation de dérivabilité pour **NK** et **NJ**. On ajoute au langage $\mathcal{L}_p$ le symbole du faux, $\perp$.

2 Les règles de NK et NJ

Le système de déduction naturelle pour la logique classique du premier ordre, **NK**, est composé par les règles des connecteurs propositionnels, des quantificateurs, ECQ et RAA (donc toutes les règles en Figure 1) [1]. Le système de déduction naturelle pour la logique intuitionniste du premier ordre, **NJ**, est composé par les mêmes règles que **NK**, sauf pour la règle RAA. Cette règle n'est pas acceptée par la logique intuitionniste, parce que elle implémente une forme de raisonnement indirect, refusé par l'intuitionnisme.

1. Un système de déduction naturelle pour la logique classique propositionnelle est défini en prenant comme base un langage propositionnel et en enlevant les règles pour les quantificateurs.

Les règles de la négation peuvent être éliminées, et on peut définir la négation comme $\neg A = A \to \bot$.

Les formules entre crochets sont des hypothèses déchargées, dont la conclusion de la règle ne dépend pas. Dans **NK** et **NJ** on admet un décharge vide (décharge de zéro occurrences de l'hypothèse) et un décharge multiple (plusieurs occurrences de l'hypothèse sont déchargées par la même règle). La seule exception est la règle RAA, pour laquelle on n'admet pas le décharge vide.

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots\\ A & B\end{matrix}}{A \land B}\ \land\mathsf{I} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \land B\end{matrix}}{A}\ \land\mathsf{E}_1 \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \land B\end{matrix}}{B}\ \land\mathsf{E}_2$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix}}{A \lor B}\ \lor\mathsf{I}_1 \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ B\end{matrix}}{A \lor B}\ \lor\mathsf{I}_2 \qquad \dfrac{\begin{matrix} & [A] & [B]\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ A \lor B & C & C\end{matrix}}{C}\ \lor\mathsf{E}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A \to B}\ \to\mathsf{I} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots\\ A \to B & A\end{matrix}}{B}\ \to\mathsf{E}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\neg A}\ \neg\mathsf{I} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots\\ A & \neg A\end{matrix}}{\bot}\ \neg\mathsf{E}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix}}{\forall x A(x)}\ \forall\mathsf{I}\ (*) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \forall x A(x)\end{matrix}}{A[t/x]}\ \forall\mathsf{E}\ (\star)$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A[t/x]\end{matrix}}{\exists x A(x)}\ \exists\mathsf{I}\ (\star) \qquad \dfrac{\begin{matrix} & [A]\\ \vdots & \vdots\\ \exists x A(x) & C\end{matrix}}{C}\ \exists\mathsf{E}\ (\dagger)$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \bot\end{matrix}}{A}\ \mathsf{ECQ} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg A]\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{A}\ \mathsf{RAA}$$

$(*)$ x n'a pas d'occurrences libre dans les hypothèses non déchargées dont A dépend.

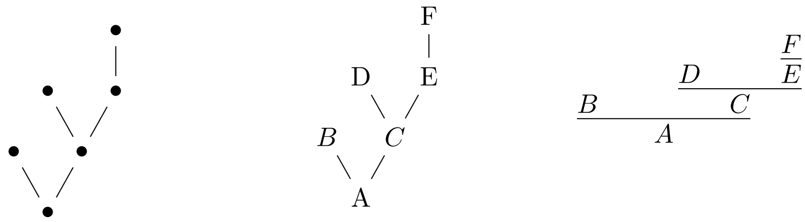
$(\star)$ t est librement substituable à x dans A.

$(\dagger)$ x n'a pas d'occurrences libres dans C, ni dans les hypothèses non déchargées dont C dépend, sauf A.

FIGURE 1 – Règles d'inférence de **NK** et **NJ**

3 Dérivations et preuves formelles (NK, NJ)

On veut donner une définition formelle de la notion de dérivation en déduction naturelle. Dans les systèmes formels “à la Hilbert”, une dérivation est une suite finie de formules. En déduction naturelle, une dérivation est un arbre fini de formules.



Arbre — Arbre de formules (arêtes verticales) — Arbre de formules (arêtes horizontales)

Figure 2 – Arbres

Un *arbre* est une structure abstraite (un *graphe*) constitué d’un ensemble d’éléments (les *sommets*) et de relations binaires entre les éléments, représentées par des lignes (les *arêtes*). Un *chemin* est une suite finie d’éléments $x_1, \ldots, x_n$, où pour chaque couple de sommets consécutifs x_i et x_{i+1}, x_i et x_{i+1} sont reliés par une arête. Un arbre est un type particulier de graphe, qui a la propriété suivante : pour chaque couple de sommets u ey v, il existe un et un seul chemin reliant u à v.

En plus, dans les arbres qu’on verra on peut toujours identifier une *racine*, le sommet qu’on écrive en bas de l’arbre, et les *feuilles*, les sommets qui ont seulement un arête les reliant à l’arbre et qui sont différents de la racine. Les feuilles sont les sommets qu’on écrive en haut de l’arbre.

Un *arbre étiqueté* est un un arbre où chaque sommet est porteur d’une information ; dans notre cas, d’une formule. On parle donc d’arbres de formules. Une dérivation est un arbre fini de formules, où les arêtes sont indiqués par des lignes horizontales au lieux que verticales. Intuitivement, une dérivation satisfait les conditions suivantes :

— Les formules figurant dans les feuilles de la dérivation sont les *hypothèses*, ou *formules initiales*, de la dérivation. Elles peuvent être déchargées ou non déchargées.

— Les formules dans les sommets qui ne sont pas de feuilles sont obtenues à partir des formules occupant les sommets immédiatement supérieurs par application d’une règle d’inférence.

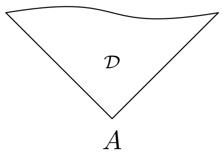
— La formule occupant la racine de l’arbre est la *formule terminale* (ou *conclusion*) de la dérivation, et dépend que des hypothèses non déchargées.

La définition suivante nous aide à définir inductivement l’ensemble des dérivations de **NK** et **NJ**.

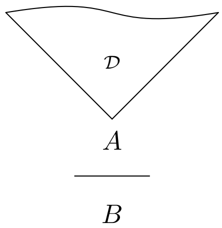
Définition 3.1.

— ARB dénote l’ensemble des arbres finis de formules ; $\mathcal{D}$, $\mathcal{F}$ dénotent des arbres ;

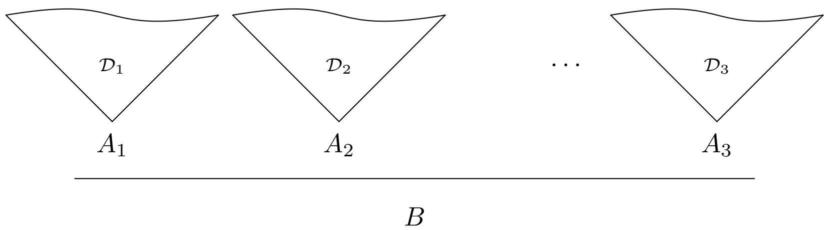
— $\mathcal{D} \rhd A$, dénote un arbre $\mathcal{D}$ dont A est la formule à la racine, graphiquement :



— Étant donnée un arbre $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{D} \rhd A$ et une formule B, on dénote par $(\mathcal{D}) \blacktriangleright B$ l'arbre obtenu en ajoutant un nouveau sommet, la racine, étiqueté par B. Graphiquement :



— Étant donnés n arbres $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$, pour $1 < n$, avec $\mathcal{D}_1 \rhd A_1, \ldots, \mathcal{D}_n \rhd A_n$ et une formule B, on dénote par $(D_1 \oplus \cdots \oplus D_n) \blacktriangleright B$ l'arbre obtenu en composant les arbres $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ et en ajoutant un nouveau sommet, la racine, étiqueté par B. Graphiquement :



On peut maintenant définir inductivement l'ensemble $\mathsf{DER}_{\mathbf{NK}} \subseteq \mathsf{ARB}$ de dérivations en **NK** : il faut spécifier selon quelles conditions un arbre fini de formules est une dérivation. La base de l'induction dit que pour toute formule A, il existe une dérivation ayant A comme formule terminale à partir de l'hypothèse non déchargée A. Donc, la suivante est une dérivation :

$$A$$

Après, il faut spécifier selon quelles règles on peut construire des dérivations "complexes" à partir des dérivations "simples". Il faut une clause pour chaque règle d'inférence, et il faut aussi spécifier quoi faire avec les hypothèses non déchargées des dérivations. Toutes les clauses se retrouvent dans la définition suivante.

Définition 3.2 (Facultative)**.** On défini par induction l'ensemble $\mathsf{DER}_{\mathbf{NK}} \subseteq \mathsf{ARB}$ des *dérivations* en **NK**, en spécifiant pour chaque dérivation $\mathcal{D}$ l'ensemble $\mathsf{hyp}(\mathcal{D})$ d'hypothèses non déchargées de $\mathcal{D}$.

(Base) Pour toute formule A, $A \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$, et $\mathsf{hyp}(A) = \{A\}$
(c'est à dire, A est une dérivation de A à partir de l'hypothèse non déchargée A).

($\wedge$I) Si $\mathcal{D}, \mathcal{F} \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$, $\mathcal{D} \triangleright A$, $\mathcal{F} \triangleright B$, on a que
— $\mathcal{G} = (\mathcal{D} \oplus \mathcal{F}) \blacktriangleright A \wedge B \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$, et
— $\mathsf{hyp}(\mathcal{G}) = \mathsf{hyp}(\mathcal{D}) \cup \mathsf{hyp}(\mathcal{F})$.
(c'est à dire, à partir d'une dérivation de A et une dérivation de B on obtient, par application de la règle $\wedge$I, une dérivation de $A \wedge B$, et les hypothèses non déchargées des deux dérivations sont cumulés.)

($\wedge$E) Si $\mathcal{D} \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$ et $\mathcal{D} \triangleright A$ on a que
— $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{D}) \blacktriangleright A \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$ et $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{D}) \blacktriangleright B \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$, et
— $\mathsf{hyp}(\mathcal{G}_1) = \mathsf{hyp}(\mathcal{G}_2) = \mathsf{hyp}(\mathcal{D})$.

($\vee$I) Si $\mathcal{D} \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$ et $\mathcal{D} \triangleright A$, pour toute formule B on a que
— $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{D}) \blacktriangleright A \vee B \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$ et $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{D}) \blacktriangleright B \vee A \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$, et
— $\mathsf{hyp}(\mathcal{G}_1) = \mathsf{hyp}(\mathcal{G}_2) = \mathsf{hyp}(\mathcal{D})$.

($\vee$E) Si $\mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$, $\mathcal{D} \triangleright A$, $\mathcal{F} \triangleright B$, $\mathcal{G} \triangleright C$ on a que
— $\mathcal{H} = (\mathcal{D} \oplus \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}) \blacktriangleright C \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$, et
— $\mathsf{hyp}(\mathcal{H}) = \mathsf{hyp}(\mathcal{D}) \cup (\mathsf{hyp}(\mathcal{F}) \setminus \{A\}) \cup (\mathsf{hyp}(\mathcal{G}) \setminus \{B\})$.

($\to$ I) Si $\mathcal{D} \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$ et $\mathcal{D} \triangleright A$ on a que
— $\mathcal{G} = (\mathcal{D}) \blacktriangleright A \to B \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$, et
— $\mathsf{hyp}(\mathcal{G}) = \mathsf{hyp}(\mathcal{D}) \setminus \{A\}$ si toutes les occurrences de A sont déchargées ; $\mathsf{hyp}(\mathcal{G}) = \mathsf{hyp}(\mathcal{D})$ si pas toutes les occurrences sont déchargées.

($\to$ E) Si $\mathcal{D}, \mathcal{F} \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$ et $\mathcal{D} \triangleright A$ et $\mathcal{F} \triangleright A \to B$ on a que
— $\mathcal{G} = (\mathcal{D} \oplus \mathcal{F}) \blacktriangleright B \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$ et
— $\mathsf{hyp}(\mathcal{G}) = \mathsf{hyp}(\mathcal{D}) \cup \mathsf{hyp}(\mathcal{F})$.

($\neg$I) Si $\mathcal{D} \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$ et $\mathcal{D} \triangleright \bot$, pour toute formule A on a que
— $\mathcal{G} = (\mathcal{D}) \blacktriangleright \neg A \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$, et
— $\mathsf{hyp}(\mathcal{G}) = \mathsf{hyp}(\mathcal{D}) \setminus \{A\}$ si toutes les occurrences de A sont déchargées ; $\mathsf{hyp}(\mathcal{G}) = \mathsf{hyp}(\mathcal{D})$ si pas toutes les occurrences sont déchargées.

($\neg$E) Si $\mathcal{D}, \mathcal{F} \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$ et $\mathcal{D} \triangleright A$ et $\mathcal{F} \triangleright \neg A$ on a que
— $\mathcal{G} = (\mathcal{D} \oplus \mathcal{F}) \blacktriangleright \bot \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$, et
— $\mathsf{hyp}(\mathcal{G}) = \mathsf{hyp}(\mathcal{D}_2) \cup \mathsf{hyp}(\mathcal{F})$.

(ECQ) Si $\mathcal{D} \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$ et $\mathcal{D} \triangleright \bot$ pour toute formule A on a que
— $\mathcal{G} = (\mathcal{D}) \blacktriangleright A \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$, et
— $\mathsf{hyp}(\mathcal{G}) = \mathsf{hyp}(\mathcal{D})$.

(RAA) Si $\mathcal{D} \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$ et $\mathcal{D} \triangleright \bot$ pour toute formule A telle que $\neg A \in \mathsf{hyp}(\mathcal{D})$ [2] on a que
— $\mathcal{G} = (\mathcal{D}) \blacktriangleright A \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$, et
— $\mathsf{hyp}(\mathcal{G}) = \mathsf{hyp}(\mathcal{D}) \setminus \{\neg A\}$ si toutes les occurrences de A sont déchargées ; $\mathsf{hyp}(\mathcal{G}) = \mathsf{hyp}(\mathcal{D})$ si pas toutes les occurrences sont déchargées.

($\forall$I) Si $\mathcal{D} \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$ et $\mathcal{D} \triangleright A$ et x n'a pas d'occurrences libres dans $\mathsf{hyp}(\mathcal{D})$, on a que
— $\mathcal{G} = (\mathcal{D}) \blacktriangleright \forall x A \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$, et

2. On ne permet pas le décharge vide pour RAA.

— $\mathsf{hyp}(\mathcal{G}) = \mathsf{hyp}(\mathcal{D})$.

($\forall$E) Si $\mathcal{D} \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$ et $\mathcal{D} \rhd \forall x A$, pour tout terme t librement substituable à x dans A on a que :

— $\mathcal{G} = (\mathcal{D}) \blacktriangleright A[t/x] \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$, et

— $\mathsf{hyp}(\mathcal{G}) = \mathsf{hyp}(\mathcal{D})$.

($\exists$I) Si $\mathcal{D} \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$ et $\mathcal{D} \rhd A[t/x]$, pour tout terme t librement substituable à x dans A on a que :

— $\mathcal{G} = (\mathcal{D}) \blacktriangleright \exists x A \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$, et

— $\mathsf{hyp}(\mathcal{G}) = \mathsf{hyp}(\mathcal{D})$.

($\exists$E) Si $\mathcal{D}, \mathcal{F} \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$, $\mathcal{D} \rhd \exists x A$, $\mathcal{F} \rhd C$, x n'a pas d'occurrences libres dans C et dans $\mathsf{hyp}(\mathcal{D}) \setminus \{A\}$, on a que

— $\mathcal{G} = (\mathcal{D} \oplus \mathcal{F}) \blacktriangleright C \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$, et

— $\mathsf{hyp}(\mathcal{G}) = \mathsf{hyp}(\mathcal{D}) \cup (\mathsf{hyp}(\mathcal{F}) \setminus \{A\})$ si toutes les occurrences de A sont déchargées ; $\mathsf{hyp}(\mathcal{G}) = \mathsf{hyp}(\mathcal{D}) \cup \mathsf{hyp}(\mathcal{F})$ si pas toutes les occurrences sont déchargées.

Définition 3.3 (Facultative)**.** L'ensemble $\mathsf{DER}_{\mathbf{NJ}}$ des dérivations en **NJ** est défini comme l'ensemble $\mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$, en éliminant la clause pour RAA.

Définition 3.4. Une *preuve* en **NK** (ou **NJ**) est une dérivation en **NK** (ou **NJ**) où toutes les hypothèses ont été déchargées. Donc, une preuve est une dérivation à partir de l'ensemble vide d'hypothèses non déchargées.

L'avantage d'avoir une définition inductive est qu'on peut maintenant démontrer des propriétés valides pour tout l'ensemble des dérivations $\mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$ ou $\mathsf{DER}_{\mathbf{NJ}}$. Pour démontrer que chaque dérivation $\mathcal{D} \in \mathsf{DER}_{\mathbf{NK}}$ a une certaine propriété P, il suffit de démontrer que :

1. La dérivation A a la propriété P, pour toute formule A ;
2. Les clauses qui spécifient comment construire une nouvelle dérivation transmettent la propriété P à cette dérivation.

Une fois qu'on a la définition de dérivation en déduction naturelle, on peut définir la relation de dérivabilité entre une formule A et un ensemble (possiblement vide) de formules.

Définition 3.5. Une formule A est *dérivable* en **NK** (ou **NJ**) à partir de l'ensemble de formules Γ, en symboles

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} A \quad (\text{ou } \Gamma \vdash_{\mathbf{NJ}} A)$$

si et seulement s'il existe une *dérivation* $\mathcal{D}$ en **NK** (ou **NJ**) ayant A comme formule terminale et dont les hypothèses non déchargées appartiennent à Γ, en symboles $\mathsf{hyp}(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$.

Définition 3.6. Une formule A est un *théorème* de **NK** (ou **NJ**), en symboles

$$\vdash_{\mathbf{NK}} A \quad (\text{ou } \vdash_{\mathbf{NJ}} A)$$

si et seulement s'il existe une *preuve* ayant A comme formule terminale.

4 Fiabilité et complétude

On dispose maintenant de deux critères pour définir l'ensemble de formules valides de la logique classique propositionnelle [3] et du premier ordre : le critère sémantique de la validité et le critère syntactique de la dérivabilité. Les deux notions sont démontrés être équivalentes par les deux théorèmes suivants.

1. **Théorème de fiabilité**. Pour toute formule A du langage $\mathcal{L}_p$, si A est un théorème de **NK**, alors A est valide. En symboles :

$$\text{si } \vdash_{\mathbf{NK}} A \text{ alors } \vDash A.$$

2. **Théorème de complétude**. Pour toute formule A du langage $\mathcal{L}_p$, si A est valide, alors A est un théorème de $\mathcal{S}$. En symboles :

$$\text{si } \vDash A \text{ alors } \vdash_{\mathbf{NK}} A.$$

En plus, le théorème de validité assure que le système de déduction naturelle a été bien défini : toute formule dérivable est valide (fiabilité), donc **NK** ne dérive pas de formules "fausses", et toutes formule valide a une dérivation en **NK** (complétude). Le système formel **NK** dérive toutes et seules les formules valides.

Fiabilité et complétude n'assurent pas la *décidabilité* de la logique classique du premier ordre. Dans le case de la déduction naturelle, le problème n'est pas que le processus de construction de la dérivation puisse ne se terminer : si on applique les règles d'une façon intelligente (par exemple, on applique pas une règle d'élimination immédiatement après une règle d'introduction pour le même connecteur) la construction de la dérivation se termine. Par contre, les règles des quantificateurs demandent de substituer les variables avec des termes quelconque. Pour cette raison, le nombre d'arbres finis de formules qui peuvent être définies pour la même formule A est infini. Pour savoir si A est dérivable dans **NK**, on peut lister toutes les possibles arbres de formules et voir si on trouve une dérivation. Si à un moment on a pas trouvé une dérivation pour A, on est pas en mesure de décider si A n'est pas dérivable ou si on n'a pas encore trouvé le bon arbre.

5 Exemples

Exemple 5.1. Preuve en **NJ** de $A \vee \neg A$ (tiers exclu). La dérivation utilise la règle RAA.

3. On a défini **NK** comme un système formel de déduction naturelle pour la logique classique du premier ordre. En enlevant les règles pour les quantificateurs, on a un système formel pour la logique classique propositionnelle, c'est à dire, qui dérive toutes et seules les formules valides du langage propositionnel.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{[A]}}{A \lor \neg A}\,\vee\mathsf{I} \quad \overset{1}{[\neg(A \lor \neg A)]}}{\bot}\,\neg\mathsf{E}}{\neg A}\,\neg\mathsf{I},2}{A \lor \neg A}\,\vee\mathsf{I} \qquad \overset{1}{[\neg(A \lor \neg A)]}}{\bot}\,\neg\mathsf{E}}{A \lor \neg A}\,\mathsf{RAA},1$$

Exemple 5.2. Dérivation de la formule $\exists x(S(x) \land P(x))$ à partir des formules $\forall x(M(x) \to P(x))$ et $\exists x(S(x) \land M(x))$. Cette inférence est une instance d'un syllogisme (Darii) :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\forall x(M(x) \to P(x)) \\ \exists x(S(x) \land M(x))\end{array}}{\exists x(S(x) \land P(x))}$$

En déduction naturelle, les deux permises du syllogisme sont des hypothèses non déchargées dans la dérivation.

$$\dfrac{\exists x(S(x) \land M(x)) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{[S(x) \land M(x)]}}{S(x)}\,\land\mathsf{E} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{[S(x) \land M(x)]}}{M(x)}\,\land\mathsf{E} \quad \dfrac{\forall x(M(x) \to P(x))}{M(x) \to P(x)}\,\forall\mathsf{E}}{P(x)}\,\to\mathsf{E}}{(S(x) \land P(x)}\,\land\mathsf{I}}{\exists x(S(x) \land P(x))}\,\exists\mathsf{I}}{\exists x(S(x) \land P(x))}\,\exists\mathsf{E},1$$

6 Lectures

Lectures sur la déduction naturelle : page 105 - 111 et 215 - 219 de [3] (attention, la notation utilisée est un peu différente de celle qu'on a utilisé en cours). Pour une présentation plus proche à celle vue en cours, se référer aux sections 1.5 et 2.8 de [5] et au chapitre 2 de [4] (les deux sont en anglais). L'article original de Gentzen [2] est très clair et intéressant à lire. La version anglaise se trouve sur Internet : `https://www.cs.cmu.edu/~crary/819-f09/Gentzen35.pdf`.

Lectures sur la logique intuitionniste : le chapitre 5 de [5] (en anglais) est une bonne introduction au sujet.

Références

[1] Pierre Wagner. *Logique et philosophie.* Ellipses, 2014.

[2] Gerhard Gentzen. Untersuchungen über das logische schliessen. *Matematische Zeitschrift*, 39 :176–210 ; 405–431, 1934-35.

[3] Denis Vernant. Introduction à la logique standard. 2001.

[4] Anne Sjerp Troelstra and Helmut Schwichtenberg. *Basic proof theory*. Number 43. Cambridge University Press, 2000.

[5] Dirk Van Dalen. *Logic and structure*. Springer, 2004.