Introduction à la logique modale

Marianna Girlando

Résumé

Notes de cours pour la séance du 21/04/2020 et du 28/04/2020. Les thèmes traités se retrouvent au chapitre 15 de [1].

1 Introduction

On dit "modale" d'une expression utilisée pour qualifier la vérité d'un énoncé, comme "nécessairement" ou "possiblement". La logique modale est la logique qui s'occupe de formaliser expressions tels que "il est nécessaire que" et "il est possible que". Ces deux "modalités" correspondent aux deux opérateurs modales, $\Box$ et $\Diamond$, qui peuvent être utilisés pour exprimer plusieurs types de modalités.

Le langage de la logique modale est défini en ajoutant au langage de la logique classique propositionnelle [1] les deux opérateurs

— $\Box$, "carré" ("box" en anglais) ;

— $\Diamond$, "losange" ("diamond" en anglais).

Les deux opérateurs modales peuvent avoir plusieurs interprétations. Selon la lecture aléthique, $\Box A$ signifie "A est nécessaire" et $\Diamond A$ signifie "A est possible" ; selon la lecture épistémique, $\Box A$ signifie "on sait que A" et $\Diamond A$ "on croit que A" ; selon la lecture déontique, $\Box A$ exprime une obligation ("A est obligatoire") et $\Diamond A$ une permission ("A est permis). Enfin, on peut assigner une lecture temporelle aux opérateurs modales, en les utilisant pour exprimer des notions comme "A est toujours vraie" ou "A sera un jour vraie" (et beaucoup d'autres). À partir du langage avec opérateurs modales, qu'on définira dans la Section 2, on peut définir plusieurs systèmes de logique modale.

Les deux opérateurs modales $\Box$ et $\Diamond$ sont interdéfinissables (c'est à dire, on peut définir $\Box A$ en termes de $\Diamond A$ et l'envers) grâce aux équivalences :

$$\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A \qquad\qquad \Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$$

On peut lire ces deux formules en termes de l'interpretation aléthique : A est nécessaire veut dire que ce n'est pas possible que non A soit le cas et A est possible veut dire que ce n'est pas nécessaire que non A soit le cas. Donc, on peut définir le langage de la logique modale en prenant juste un des deux opérateurs (en général on choisit $\Box$) et en l'utilisant pour définir l'autre. Pour simplifier les définitions, on inclura les deux opérateurs dans le langage.

1. On peut définir aussi une logique modale du premier ordre, en ajoutant les opérateurs modales au langage du premier ordre.

Les opérateurs modales permettent d'exprimer des notions qu'on pouvait pas exprimer dans le langage propositionnel. Le langage des logiques modales est plus riche que le langage propositionnel, et les opérateurs modales ne sont pas *vérifonctionnels*, c'est à dire, on ne peut pas exprimer la valeur de $\Box A$ ou $\Diamond A$ à partir du valeur de vérité de A. Par conséquent, on ne peut pas dresser une table de vérité pour évaluer les formules modales. La sémantique pour la logique modale doit forcement être différente de la sémantique des tables de vérité de la logique classique propositionnelle : pour assigner des valeurs de vérité aux formules modale on aura besoin de définir des *structures d'interprétations*, similaires à celles définies pour évaluer le langage avec quantificateurs. La sémantique pour les opérateurs modales est dite sémantique "des mondes possibles", ou sémantique de Kripke. On l'introduira dans la Section 3.

Historiquement, la logique modale a été introduite par C.I. Lewis [2] (1918, 1932), qui a défini par des systèmes d'axiomes cinq logiques modales différentes. Grace à la sémantique des modes possibles, introduite par Hintikka et Kripke (années 1960), la logique modale a atteint son plein développement : cette sémantique offre une interpretation simple et intuitive des opérateurs modales. Aujourd'hui, les logiques modales ont un grand intérêt, entre autres, dans le domaine de intelligence artificielle et de la représentation des croyances.

2 Langage $\mathcal{L}_\Box$

L'*alphabet* de $\mathcal{L}_\Box$ est composé des symboles suivants :

- Signes non logiques : un ensemble $\mathcal{A}$ infini dénombrable de lettres de propositions, ou *atomes* : $p, q, r \dots$;
- Signes logiques : les opérateurs $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Box, \Diamond$;
- Signes auxiliaires : les parenthèses) et (.

Une *expression* de $\mathcal{L}_p$ est une suite finie quelconque de symboles de l'alphabet de $\mathcal{L}_\Box$. L'ensemble de formules de $\mathcal{L}_\Box$ est défini par induction. On utilise les lettres majuscules de notre alphabet $A, B, C \dots$ pour dénoter les formules (non atomiques) de $\mathcal{L}_\Box$.

Définition 2.1. L'ensemble $\mathsf{For}(\mathcal{L}_\Box)$ de *formules* de $\mathcal{L}_\Box$ est défini inductivement à partir des atomes.

- Les atomes sont des formules de $\mathcal{L}_\Box$;
- Si A, B sont des formules de $\mathcal{L}_\Box$, aussi $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $\Box A$ et $\Diamond A$ sont des formules de $\mathcal{L}_\Box$;
- Rien d'autre est une formule.

3 Sémantique des mondes possibles et K-validité

Selon l'interpretation aléthique des opérateurs modales, $\Box A$ signifie "A est nécessaire". On peut définir la notion de nécessité comme vérité dans toutes les situations, ou scenarios, possibles : A est une nécessité (physique, morale, etc.) si elle est vraie dans

2. À ne pas confondre avec David Lewis, philosophe, qui a introduit la logique modale contrefactuelle, et avec C.S. Lewis, écrivain des Chroniques de Narnia.

tous les scénarios possibles. Similairement, "A est possible" veut dire que A est vraie dans au moins un des situations possibles. Pour exemple, si A est une loi physique, A est nécessaire, au sens que dans toutes les différents situations (les *mondes possibles*), A est vraie. Au contraire, dans un scénario où Alice n'a aucune sœur, la formule "Alice a une sœur" n'est pas vraie ; mais on peut envisager un monde alternatif dans lequel Alice a une sœur. Donc, A est possible.

Les *mondes possibles* sont utilisés dans la sémantique de Kripke, ou sémantique des mondes possibles, pour assigner une valeur de vérité aux opérateurs modales. En plus, la sémantique de Kripke introduit une relation binaire entre mondes possibles, qui choisit les mondes qui sont à considérer "possibles", ou plus généralement "accessibles", à partir d'un certain monde. Intuitivement, une formule $\Box A$ est vraie à un monde w si A est vraie dans tous les mondes accessible à partir de w ; et $\Diamond A$ est vraie à un monde w si A est vraie dans au moins un des mondes accessibles dès w.

Les mondes possibles de la sémantique de Kripke réassemblent aux mondes possibles de Leibniz : ils sont les alternatives possibles à un certain état des choses. L'évaluation de "nécessaire" et "possible" en termes de mondes possibles est aussi une idée de Leibniz. La sémantique des mondes possibles a originé (et origine) un débat philosophique autour du le statut ontologique de ces mondes (est-ce qu'ils sont réels ?) et de plusieurs autres questions (pour exemple, comme on peut se référer au même individu dans des mondes différents ?). Pour nous, les mondes possibles sont un instrument formel qui permet de définir la sémantique. Par conséquent, on s'occupera pas de questions ontologiques, et on va considérer l'ensemble des mondes possibles comme un ensemble d'éléments quelconque.

Définition 3.1. Un *cadre de Kripke* ("frame" en anglais) est une structure relationnelle $\mathbb{F} = (W, R)$, où

- W est un ensemble non vide d'éléments, appelé *ensemble de mondes possibles* ; on dénote par $w, k, j, z, \ldots$ les éléments de W ;
- R est une relation binaire sur W, appelée *relation d'accessibilité.*

Figure 1 présente des cadres de Kripke, représentés en forme de graphe : les sommets (les cercles) sont les éléments de W, les *mondes*, et les arêtes (flèches) représentent la relation R. Le cadre a est composé d'un seul monde, w_1, qui n'a pas accès à autres

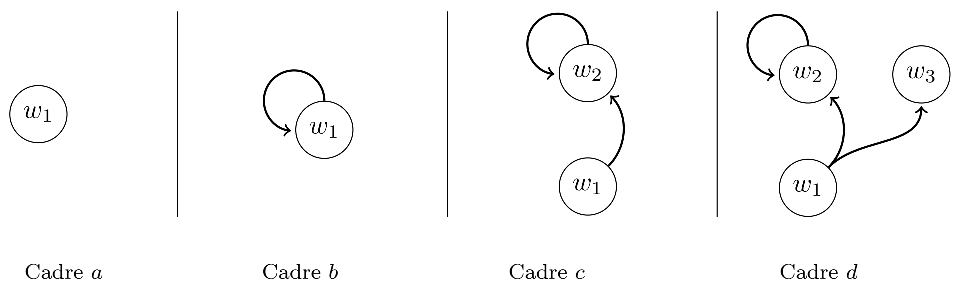


FIGURE 1 – Cadres de Kripke.

mondes, y inclus soi même (on dit que le monde w_1 ne voit aucun monde). On appelle un tel monde un *monde terminal* (en anglais : “dead end”) : c’est un monde w pour lequel, pour tout les $k \in W$, wRk n’est pas dans R. Le cadre b est composé d’un seul monde, qui est en relation avec soi même, $w_1 R w_1$ (on dit que w_1 voit soi même). Le cadre c est composé d’un monde w_1 qui voit w_2 (donc : $w_1 R w_2$) et un monde 1 qui voit soit même. Dans le cadre d, on a que $w_1 R w_2$, $w_2 R w_2$ et $w_1 R w_3$, et monde w_3 est un monde terminal, vu qu’il ne voit aucun monde.

Pour définir une structure d’interpretation pour $\mathcal{L}_\Box$ (on dira aussi : une *K-structure*) on doit assigner une valeur de vérité aux atomes dans chaque monde du cadre.

Définition 3.2.

— Soit $\mathbb{F}$ un cadre de Kripke. Une *fonction d’interpretation* I est une fonction

$$I : \mathcal{A} \times W \longrightarrow \{0, 1\}$$

c’est à dire, une fonction qui assigne à chaque monde $w \in W$ et à chaque lettre de proposition $p \in \mathcal{A}$ une valeur de vérité qui est 0 si l’atome est faux dans le monde, 1 s’il est vrai. Pour indiquer que la fonction I donne la valeur vrai (ou faux) à la lettre p au monde w, on écrit $I(p, w) = 1$ (ou $I(p, w) = 0$).

— Une *structure d’interpretation* $\mathcal{M}$ pour $\mathcal{L}_\Box$, ou une *K-structure*, est une triplet (W, R, I), où $\mathbb{F} = (W, R)$ est un cadre de Kripke et I est une fonction d’interpretation.

Exemple 3.1. On définit une structure d’interpretation $\mathcal{M}$ pour le cadre d de la Figure 1. Les mondes sont $W = \{w_1, w_2, w_3\}$; la relation d’accessibilité est définie par $w_1 R w_2, w_2 R w_2, w_1 R w_3$. La fonction d’interpretation est définie en Figure 2 pour atomes p et q ; tous les autres atomes prennent la valeur faux sur l’ensemble de mondes. On peut représenter I dans le graphe (Figure 2), en notant à côté de chaque monde les atomes vraies à tel monde (on n’écrit pas les atomes faux).

$$\begin{array}{ll} I(p, w_1) = 0 & I(q, w_1) = 1 \\ I(p, w_2) = 1 & I(q, w_2) = 1 \\ I(p, w_3) = 1 & I(q, w_3) = 0 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

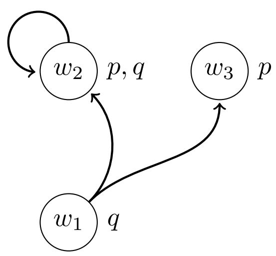


FIGURE 2 – Fonction d’interpretation et K-structure

On veut maintenant évaluer les formules de $\mathcal{L}_\Box$ à chaque monde d’une K-structure. On dénote la notion de vérité de la formule A au monde w de la K-structure $\mathcal{M}$ par :

$$\mathcal{M}, w \models A$$

Si A est une formule atomique p, la fonction d’interpretation I nous donne l’information nécessaire à l’évaluation : si $I(p, w) = 1$, alors $\mathcal{M}, w \models p$. Il faut étendre l’information contenue dans I pour évaluer aussi les formules complexes. L'idée est la suivante : pour évaluer les formules dont le connecteur principal est verifonctionnel ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$) à un monde w, on utilise l'intuition des tables de vérité. Pour exemple, la formule $p \wedge q$ est vraie au monde w_2 de la K-structure en Figure 2, vu que les deux atomes p et q ont la valeur 1 en w_2. Pour évaluer les formules dont le connecteur principal est modale, ($\Box$, $\Diamond$) à un monde w, on considère l'évaluation des formules aux mondes accessibles selon la relation R dès le monde w.

Définition 3.3. La relation de *vérité d'une formule A à un monde w d'une K-structure* $\mathcal{M}$ est définie inductivement de la façon suivante :

1. $\mathcal{M}, w \models p$ ssi $I(p, w) = 1$;
2. $\mathcal{M}, w \models \neg A$ ssi $\mathcal{M}, w \not\models A$;
3. $\mathcal{M}, w \models A \wedge B$ ssi $\mathcal{M}, w \models A$ et $\mathcal{M}, w \models B$;
4. $\mathcal{M}, w \models A \vee B$ ssi $\mathcal{M}, w \models A$ ou $\mathcal{M}, w \models B$;
5. $\mathcal{M}, w \models A \rightarrow B$ ssi $\mathcal{M}, w \not\models A$ ou $\mathcal{M}, w \models B$;
6. $\mathcal{M}, w \models \Box A$ ssi pour tout $k \in W$, si wRk alors $\mathcal{M}, k \models A$;
7. $\mathcal{M}, w \models \Diamond A$ ssi il existe un $k \in W$ tel que wRk et $\mathcal{M}, k \models A$.

Exemple 3.2. Dans la K-structure de Figure 2, on a que $\mathcal{M}, w_1 \models p \vee q$ et $\mathcal{M}, w_1 \models p \rightarrow q$; $\mathcal{M}, w_2 \models p \wedge q$ et $\mathcal{M}, w_2 \models p \rightarrow q$; $\mathcal{M}, w_3 \models p \vee q$. Pour les formules modales, on a que $\mathcal{M}, w_1 \models \Box p$: p est vraie dans tous les mondes accessibles depuis w_1 (w_2 et w_3). Similairement, $\mathcal{M}, w_1 \models \Diamond p$ et $\mathcal{M}, w_1 \models \Diamond q$. On a que $\mathcal{M}, w_2 \models \Box p$, vu que w_2 voit soi même et A est vraie dans w_2. Similairement, $\mathcal{M}, w_2 \models \Diamond p$, $\mathcal{M}, w_2 \models \Box q$ et $\mathcal{M}, w_2 \models \Diamond q$.

Les clauses négative pour les formules avec opérateurs modales sont les suivantes :
— $\mathcal{M}, w \not\models \Box A$ ssi il existe un $k \in W$ tel que wRk et $\mathcal{M}, k \not\models A$;
— $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond A$ ssi pour tout $k \in W$, si wRk alors $\mathcal{M}, k \not\models A$.
Si w est un monde terminal (un monde qui n'a accès à aucun monde), pour toute formule A et pour toute K-structure,

$$\mathcal{M}, w \models \Box A \qquad\qquad \mathcal{M}, w \not\models \Diamond A$$

La clause de vérité d'une formule $\Box A$ (pour toute A) est toujours satisfaite, vu que l'ensemble des mondes accessibles est vide. Aucune formule $\Diamond A$ (pour toute A) est vraie dans w, vu qu'il n'existe aucun monde accessible.

Exemple 3.3. Toujours en se référant à la K-structure de la Figure 2, on a que $\mathcal{M}, w_1 \not\models \Box q$ (parce que $w_1 R w_3$ et $w_3 \not\models q$) et, vu que w_3 est un monde terminal, $\mathcal{M}, w_3 \not\models \Diamond p$, $\mathcal{M}, w_3 \not\models \Diamond q$, $\mathcal{M}, w_3 \models \Box p$ et $\mathcal{M}, w_3 \models \Box q$.

On peut maintenant définir les notions plus générales de *validité* d'une formule dans une K-structure, dans un cadre et dans tout cadre.

Définition 3.4.

— Soit $\mathcal{M} = (W, R, I)$ une K-structure et A une formule de $\mathcal{L}_\Box$. On dit que A est *valide dans une K-structure* $\mathcal{M}$ si et seulement si pour tout $w \in W$, on a $\mathcal{M}, w \models A$. On dit que A est *invalide dans une K-structure* $\mathcal{M}$ si et seulement si pour tout $w \in W$, on a $\mathcal{M}, w \not\models A$.

— Soit $\mathbb{F} = (W, R)$ un cadre de Kripke et A une formule de $\mathcal{L}_\Box$. On dit que A est *valide dans un cadre* $\mathbb{F}$ si et seulement si A est valide dans toutes les K-structures dont le cadre est (W, R).

— Soit A une formule de $\mathcal{L}_\Box$. A est *K-valide*, en symboles

$$\models_{\mathrm{K}} A$$

si et seulement si A est valide dans tout cadre de Kripke.

La notion de K-validité capture toutes les formules qui sont valides dans toutes les cadres et donc, équivalemment, dans toutes les K-structures. Les formules K-valides sont des *tautologies modales minimales* : des formules qui sont vraies indépendamment de leur signification et du contexte. Plus précisément, l'ensemble de formules K-valides identifie la logique modale minimale **K**.

On va voir quelques exemples de schémas de formules K-valides.

Exemple 3.4. Pour toutes formules A, B de $\mathcal{L}_\Box$, on a que

$$\models_{\mathrm{K}} \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B) \tag{1}$$

(c'est à dire : le schéma $\Box(A \to B) \to (\Box A \to B)$ est K-valide). Pour démontrer cette affirmation, on prend une K-structure *arbitraire* $\mathcal{M} = (W, R, I)$, et un monde $w \in W$, et on essaye de montrer que

$$\mathcal{M}, w \models \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B) \tag{2}$$

Si on arrive à démontrer (2), on a que (1) est démontré : vu qu'on a pas fait des autres assomptions sur la K-structure et le monde choisi, (2), si démontrée, vaut pour toute K-structure et tout monde [3]. On veut donc démontrer (2). Pour que (2) soit vraie, selon la clause 5 de la Définition 3.3 il faut montrer que, à partir des assomptions suivantes (on lit $\rightsquigarrow$ comme "c'est à dire") :

$$\mathcal{M}, w \models \Box(A \to B) \quad \rightsquigarrow \quad \text{pour tout } k \in W, \text{ si } wRk \text{ alors } \mathcal{M}, k \models A \to B \tag{3}$$

$$\mathcal{M}, w \models \Box A \quad \rightsquigarrow \quad \text{pour tout } k \in W, \text{ si } wRk \text{ alors } \mathcal{M}, k \models A \tag{4}$$

on peut conclure

$$\mathcal{M}, w \models \Box B \quad \rightsquigarrow \quad \text{pour tout } k \in W, \text{ si } wRk \text{ alors } \mathcal{M}, k \models B. \tag{5}$$

On suppose qu'il y ait un monde $k \in W$ tel que wRk (s'il n'a pas un tel monde, w est un monde terminal, et (5) est vraie, donc (2) est démontrée). Pour l'assomption (3), on a

3. Dans [1], page 251, une stratégie différente est employée pour démontrer la même chose : on assume qu'il existe une K-structure (W, R, I) et un monde $w \in W$ tels que $\mathcal{M}, w \not\models \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$, et on arrive à une contradiction.

que $\mathcal{M}, k \models A \rightarrow B$ et donc, pour la clause 5 de la Définition 3.3, on a que $\mathcal{M}, k \not\models A$ ou $\mathcal{M}, k \models B$. Pour l'assomption (4) on peut conclure que $\mathcal{M}, k \models A$; et donc, $\mathcal{M}, k \models B$. Vu que ce raisonnement est vrai pour tous les mondes k tels que wRk, on peut conclure que (5) est satisfaite, et donc que (2) est démontrée.

Exemple 3.5. On veut démontrer que les schémas suivants sont K-valides :

$$\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A \qquad \Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$$

On démontre seulement la validité du premier schéma (le deuxième est similaire). On assume que, pour une K-structure *arbitraire* $\mathcal{M} = (W, R, I)$, et un monde $w \in W$, $\mathcal{M}, w \models \Box A$. Donc, pour tous $k \in \mathcal{M}$, si wRk alors $\mathcal{M}, k \models A$, et il n'existe aucun $k \in W$ tel que wRk et $\mathcal{M}, k \not\models A$. Par conséquent, pour la clause 2 de la Définition 3.3, il n'existe aucun $k \in W$ tel que wRk et $\mathcal{M}, k \models \neg A$. Pour la clause négative des formules avec $\Diamond$, on a que $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond\neg A$, et donc $\mathcal{M}, w \models \neg\Diamond\neg A$. Si on assume que $\mathcal{M}, w \models \neg\Diamond\neg A$ on peut conclure que $\mathcal{M}, w \models \Box A$, en suivant, à l'envers, le même raisonnement.

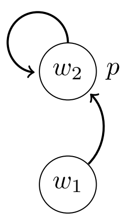
4 Au-delà de la K-validité

L'ensemble de formules K-valides définit la logique modale **K**, qui est le système de base de la logique modale. On obtient des systèmes de logique modale qui étendent **K** en ajoutant des conditions sur la relation d'accessibilité des cadres. On commence par un exemple[4].

Exemple 4.1. Le schéma T n'est pas K-valide, mais il est valide dans toutes les cadres $\mathbb{F} = (W, R)$ où R est réflexive.

$$T \;\equiv\; \Box A \rightarrow A$$

On vérifie que T n'est pas K-valide. Pour ça, il suffit de trouver une K-structure $\mathcal{M}_c = (W^c, R^c, I^c)$ où figure un monde qui falsifie une instance de T. On considère l'instance $\Box p \rightarrow p$; on trouve une K-structure et un monde dans lequel $\Box p$ est vrai, mais p est faux, et donc $\Box p \rightarrow p$ est fausse. On définit $W^c = \{w_1, w_2\}$, $w_1 R^c w_2$, $w_2 R^c w_2$, et on suppose que la fonction d'interpretation rends vrai un seul atome, p, au monde w_2.



On a que $w_1 \models \Box p$, parce que dans tous les mondes accessibles depuis w_1 (seulement w_2), p est vraie. Mais $w_1 \not\models p$; et donc $w_1 \not\models \Box p \rightarrow p$.

4. En écrivant $\mathcal{M}, w \models A$, on omet de spécifier $\mathcal{M}$ et on écrit juste $w \models A$ si la structure $\mathcal{M}$ est identifiable sans ambiguïté.

Sérialité	Pour tous $x \in W$ il existe $y \in W$ tel que xRy.
Réflexivité	Pour tous $x \in W$ on a que xRx.
Symétrie	Pour tous $x, y \in W$, si xRy alors yRx.
Transitivité	Pour tous $x, y, z \in W$, si xRy et yRz, alors xRz.
Euclideicité	Pour tous $x, y, z \in W$, si xRy et xRz, alors yRz.

FIGURE 3 – Propriétés de la relation d'accessibilité

On montre que, dans tout cadre où R est réflexive, le schéma T est valide. Soit $\mathcal{M} = (W, R, I)$ une K-structure où la seule hypothèse qu'on fait est que R soit réflexive : pour tout monde $w \in W$, on a que wRw (à noter : la K-structure qu'on vient de voir n'a pas cette propriété). On considère un monde arbitraire $w \in W$, et on suppose que $w \models \Box A$, pour A formule quelconque. Pour la clause 7 de la Définition 3.3, ça veut dire que, pour tout monde $j \in W$ tel que wRj, on a que $j \models A$. Pour la réflexivité, on a que wRw ; et donc, que $w \models A$. On peut démontrer d'une façon similaire que le schéma

$$T^d \;\equiv\; A \to \Diamond A$$

n'est pas K-valide, mais il est valide dans cadre réflexive, et donc dans toutes les K-structures dont la relation d'accessibilité est réflexive.

Observation 4.1. Les deux schémas T et T^d (le *dual* de T) sont acceptés dans une lecture aléthique et dans une lecture épistémique (si on sait que A, alors A est vraie). Ils ne sont pas acceptés dans une lecture déontique (si A est obligatoire, ce n'est pas forcement le cas que A soit vraie : on peut ne pas respecter nos obligations).

Les notions suivantes définissent la validité d'une formule (ou schéma de formule) dans *tous les cadres* (on peut parler de *classes* de cadres) dont la relation d'accessibilité a une des propriétés définies en Figure 3. Cette définition est différente de la Définition 3.4, qui couvre le cas de la validité d'une formule dans *un seul* cadre.

Définition 4.1. Soit A une formule de $\mathcal{L}_\Box$. On dit que :

— A est D-valide, notation $\vDash_{\mathrm{D}} A$, si A est valide dans tout cadre dont la relation d'accessibilité est *sérielle* ;

— A est T-valide, notation $\vDash_{\mathrm{T}} A$, si A est valide dans tout cadre dont la relation d'accessibilité est *réflexive* ;

— A est B-valide, notation $\vDash_{\mathrm{B}} A$, si A est valide dans tout cadre dont la relation d'accessibilité est *symétrique* ;

— A est K4-valide, notation $\vDash_{\mathrm{K4}} A$, si A est valide dans tout cadre dont la relation d'accessibilité est *transitive* ;

— A est K5-valide, notation $\vDash_{\mathrm{K5}} A$, si A est valide dans tout cadre dont la relation d'accessibilité est *euclidienne*.

On peut composer ces notions de validité, obtenant notamment :

— A est S4-valide, notation $\vDash_{\mathrm{S4}} A$, si A est valide dans tout cadre dont la relation d'accessibilité est *réflexive* et *transitive* ;

— A est S5-valide, notation $\vDash_{S5} A$, si A est valide dans tout cadre dont la relation d'accessibilité est *réflexive* et *euclidienne*[5].

Les classes de cadres identifient différent ensembles de formules valides, qui correspondent à plusieurs différents systèmes de logiques modales. On considère les logiques suivantes : **D**, correspondant aux formules D-valides, **T**, correspondant aux formules T-valides, **B**, correspondant aux formules B-valides, **K4**, correspondant aux formules K4-valides, **S4**, correspondant aux formules S4-valides, et **S5**, correspondant aux formules S5-valides[6].

Chacune de ces logique est une *extension* de la logique modale minimale **K**, au sens que toute formule qui est K-valide est D-valide, T-valide, B-valide, K4-valide, K5-valide, S4-valide et S5-valide mais il existent des formules D-valides, T-valides, B-valides, K4-valides, K5-valides, S4-valides et S5-valides qui ne sont pas K-valides (parce qu'elles sont valides seulement dans des classes de cadres de Kripke ayant des propriétés particulières). On représente les rapports d'extension entre logiques modales dans le schéma en Figure 4. Une flèche dont le point de départ est le système $\mathbf{L}_1$ et le point d'arrivé est $\mathbf{L}_2$ signifie que $\mathbf{L}_2$ est un extension de $\mathbf{L}_1$: c'est à dire, toutes les formules L_1-valides sont L_2-valides et il existent des formules L_2-valides qui ne sont pas L_1-valides.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{K4} \arrow[rr] & & \mathbf{S4} \arrow[dr] & \\
\mathbf{K} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \mathbf{S5} \\
 & \mathbf{D} \arrow[r] & \mathbf{T} \arrow[r] \arrow[uur] & \mathbf{B} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Figure 4 – Logiques modales

5 Systèmes d'axiomes

Dans les Sections précédentes on a présenté la logique modale **K** et (certaines de) ses extensions d'un point de vue *sémantique* : les formules valides de **K** sont toutes et seules les formules K-valides (vraies à chaque monde de chaque K-structure), et les formules valides dans des les extensions de **K** sont toutes et seules les formules valides dans certains classes de cadres de Kripke, c'est à dire, dans touts les cadres de Kripke ayant une relation de'accessibilité avec des propriétés spécifiques.

Dans cette section, on présente les mêmes logiques d'un point de vue *syntactique*, en définissant un système formel pour chaque logique. Même si c'est possible de définir des systèmes à la Gentzen pour les logiques modales, on va présenter des systèmes formels à la Hilbert, ou *axiomatiques* : chaque logique est définie par (plusieurs) axiomes et

5. Une relation réflexive et euclidienne est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive).

6. Il existe un total de 15 différents logiques modales obtenues en combinant les propriétés des cadres en Figure 3. On considère ici que les logiques le plus connues.

(peu de) règles d'inférence. Les dérivations dans ces systèmes sont des suites finies de formules.

Le système d'axiomes qui capture la logique modale minimale **K** est défini en ajoutant à un système formel pour la logique propositionnelle (comme le système $\mathcal{H}$ présenté dans [1], page 215) les schémas d'axiomes suivants :

— Axiome K : $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

— Axiome I_1 : $\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$

— Axiome I_2 : $\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$

Les axiomes I_1 et I_2 expriment le fait que l'opérateur $\Box$ est définissable à partir du $\Diamond$, et vice versa. Ils sont nécessaires dans le système d'axiome seulement si les deux opérateurs $\Box$ et $\Diamond$ sont présent dans le langage. Si langage contient seulement le $\Box$, l'axiome K suffit. En plus, on ajoute au système formel pour la logique propositionnelle la règle de nécessitation :

$$\frac{A}{\Box A}\ \mathsf{nec}$$

On dénote la dérivabilité d'une formule A à partir des axiomes de **K** comme $\vdash_{\mathrm{K}} A$. Une dérivation pour la formule $\Box(p \wedge q) \to (\Box p \to \Box q)$ se trouve à la page 263 de [1].

Les systèmes formels pour les extensions de **K** sont définis en ajoutant les axiomes en Figure 5 au système d'axiomes pour **K**. La définition des systèmes formels se trouve en Figure 6. On peut é On dénote la dérivabilité d'une formule A à partir des axiomes de **D** par $\vdash_{\mathrm{D}} A$, à partir des axiomes de **T** par $\vdash_{\mathrm{T}} A$, etc.

D	$\Box A \to \Diamond A$
T	$\Box A \to A$
B	$A \to \Box\Diamond A$
4	$\Box A \to \Box\Box A$
5	$\Diamond A \to \Box\Diamond A$

FIGURE 5 – Axiomes pour extensions de **K**

D	Système formel pour **K** + Axiome D
T	Système formel pour **K** + Axiome T
B	Système formel pour **K** + Axiome B
K4	Système formel pour **K** + Axiome 4
S4	Système formel pour **K** + Axiome 4 + Axiome T
S4	Système formel pour **K** + Axiome 5 + Axiome T

FIGURE 6 – Systèmes formels axiomatiques

On peut démontrer des théorèmes de fiabilité et complétude pour chaque système de logique modale, démontrant que

$$\vDash_{\mathrm{L}} A \quad \text{si et seulement si} \quad \vdash_{\mathrm{L}} A$$

pour **L** système de logique modale **K**, **D**, **T**, **K4**, **S4**, **S5**.

Exercice 5.1. Démontrer les validités suivantes :

1. L'axiome D est D-valide (valide dans toutes les K-structures dont la relation d'accessibilité est sérielle) ;
2. Les axiomes D et T sont T-valides (valides dans toutes les K-structures dont la relation d'accessibilité est réflexive) ;
3. Les axiomes D, T et B sont B-valides (valides dans toutes les K-structures dont la relation d'accessibilité est symétrique) ;
4. L'axiome 4 est K4-valide (valide dans toutes les K-structures dont la relation d'accessibilité est transitive) ;
5. Les axiomes 4 et T sont S4-valides (valides dans toutes les K-structures dont la relation d'accessibilité est réflexive et transitive) ;
6. Les axiomes D, T, B, 4 et 5 sont S5-valide (valides dans toutes les K-structures dont la relation d'accessibilité est réflexive et euclidienne).

Références

[1] Pierre Wagner. *Logique et philosophie.* Ellipses, 2014.