Déduction et systèmes formels

Marianna Girlando

Résumé

Notes de cours pour la séance du 17/03/2020. Les thèmes traité pendant cette séance se retrouvent dans le chapitre 13 de [1].

1 La relation de déduction logique

La relation de *conséquence logique* est une notion sémantique qui nous permet de vérifier la validité d'une inférence : une inférence est valide si et seulement si tout modèle qui rend vraies les prémisses de l'inférence rend vraie la conclusion.

On s'intéresse maintenant à la relation de *déduction logique*. Intuitivement, cette relation subsiste entre une un énoncé ϕ et un ensemble d'énoncés Γ si ϕ peut être déduit de Γ, c'est à dire si, en prenant Γ comme ensemble de prémisses, on peut faire une *inférence déductive* et conclure ϕ. La relation de déduction est très utilisé dans le raisonnement mathématique : dans ce domaine, on peut la penser comme exprimant la démontrabilité d'un certain énoncé (qui peut être un théorème, un lemme, ...) à partir des vérités générales d'une théorie (géométrie, arithmétique, ...) ou à partir des autres théorèmes de la théorie.

Pour définir formellement la déduction logique on introduit la relation de *dérivabilité*. Pour ça, il faut spécifier un langage, un ensemble d'axiomes et un ensemble de règles d'inférence. Ces trois éléments définissent un *système formel*. À l'intérieur d'un système formel, la relation de dérivabilité subsiste entre une un énoncé ϕ et un ensemble d'énoncés Γ si ϕ est *dérivable* de Γ en utilisant axiomes et règles d'inférences. Si un énoncé peut être dérivé seulement à partir des axiomes (donc s'il est dérivable d'un ensemble $\Gamma = \{\emptyset\}$), on dit qu'il est un *théorème*.

La notion de dérivabilité peut être caractérisée comme *syntactique*, au sens qu'on la définit par apport à la *forme logique* des énoncés, et pas par apport aux structures d'interpretation.

2 Raisonnement axiomatique-déductif

Le raisonnement axiomatique-déductif consiste à identifier un ensemble de propositions d'une théorie dont la vérité est intuitivement reconnue (les *axiomes*), et déduire de ces axiomes toutes les autres propositions vraies selon la théorie. Cette méthode a l'intérêt épistémologique d'isoler les propositions basiques d'une théorie, c'est à dire, toutes et seules les propositions dont on a besoin pour démontrer la vérité des autres propositions de la théorie.

Autre que la simplicité ou l'auto-évidence, plusieurs propriétés peuvent être souhaités pour un ensemble d'axiomes :

— Les axiomes sont *indépendants* les uns des autres : si un axiome peut être déduit des autres, il n'est pas indispensable ;
— Les axiomes forment un ensemble *non contradictoire* ;
— Les axiomes forment un ensemble *complet* : pour tout énoncé, soit l'énoncé soit sa négation peut être déduit des axiomes.

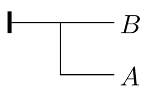
Méthodes informels de raisonnement axiomatique étaient connus dès la Grèce antique : les *Éléments* d'Euclide (IV siècle av. J.-C.) représentent la première application de cette méthode, dans le domaine de la géométrie. Euclide a identifié 5 énoncés auto-évidents (les *postulats*), avec l'objectif de montrer comme tous les énoncés vrais (les théorèmes) de la géométrie pouvaient être déduits à partir des postulats grâce à une chaîne d'inférences déductives.

Au XIX siècle, les "axiomes de Dedekind-Peano" représentent un tentative de trouver un ensemble d'axiomes dont touts les énoncés vrais (au nouveau : les théorèmes) de l'arithmétique peuvent être déduits [1].

Pour donner une définition formelle de la relation de déduction il ne suffit pas d'indiquer des axiomes : il faut spécifier le langage (donc, définir les énoncés) et les *règles* utilisés pour déduire un énoncé à partir d'un ensemble (possiblement vide) d'énoncés. Frege, dans le *Begriffsschrift* (*Idéographie*, 1879), est le premier à inclure explicitement dans son système une règle d'inférence, le *Modus Ponens* :

$$\frac{(\phi \to \psi) \quad \phi}{\psi}\ \mathsf{MP}$$

Le système de Frege est considéré le premier *système formel*. Au lieu que donner une axiomatisation pour un domaine particulier (arithmétique, géométrie, ...), Frege définit un système pour déduire les énoncés valides de la logique. Au lieux d'utiliser les connecteurs logiques qu'on utilise aujourd'hui, Frege utilise une une syntaxe graphique qui résulte assez difficile à lire. Pour exemple [2], la formule $A \to B$ s'écrit :



Aussi pour cette raison, l'importance du système de Frege n'a pas été immédiatement comprise. Quelque décennie plus tard, David Hilbert reprit les travaux de Frege et proposa un ambitieux programme "formaliste". Hilbert proposa aussi la définition du système formel qu'on utilise aujourd'hui (et qu'on verra dans la prochaine section). Le programme de Hilbert prévoyait la définition d'un système formel pour l'arithmétique et la démonstration de sa *consistance*. Un système formel est consistant, ou cohérent, s'il existent des énoncés qui ne sont pas démontrables (donc, qui ne peuvent pas être déduits)

1. *Facultatif* : voir le document joint aux notes de cours.
2. Le texte de Frege est facilement accessible sur Internet, si vous voulez y jeter un coup d'œil : `https://www.informationphilosopher.com/solutions/philosophers/frege/Frege_Begriffsschrift.pdf`

à partir des axiomes. Cette propriété établisse que le système formel ne démontre pas *tous* les énoncés d'un langage : pour exemple, généralement on ne veut pas que l'énoncé $A \wedge \neg A$, soit démontrable, ou que $0 = 1$ soit démontrable dans un système formel pour l'arithmétique.

Gödel (1931) montra l'impossibilité du programme formaliste avec ses deux théorèmes d'incomplétude. Le premier théorème affirme que, étant donné un système formel, il existe un énoncé pour lequel on ne peut ni montrer qu'il est démontrable des axiomes ni qu'il n'est pas démontrable. Cet énoncé est *indécidable* dans le système. Le deuxième théorème, corollaire du premier, affirme que, étant donné un système formel, si le système formel est *consistant*, alors il existe un énoncé formulé dans le langage du système qui exprime la consistance du système, et que cet énoncé n'est pas démontrable dans le système. Donc, un système formel consistant ne peut pas démontrer pas sa propre consistance.

Même si le programme de Hilbert a échoué, la notion de système formel garde une importance fondamentale dans la logique contemporaine.

3 Systèmes formels

Définition 3.1. Étant donné un langage formel $\mathcal{L}$, un *système formel* est composé par :
- Un ensemble de formules [3] de $\mathcal{L}$, qu'on appelle *axiomes* ;
- Un ensemble de *règles d'inférence* pour $\mathcal{L}$.

Les axiomes et les règles d'inférence permettent de définir la *relation de dérivabilité*, qu'on note $\vdash$, entre une formule et un ensemble (possiblement vide) de formules.

Définition 3.2. Étant donné un système formel $\mathcal{S}$, une formule ϕ et un ensemble de formules Γ, on dit que ϕ est *dérivable* dans $\mathcal{S}$ à partir de Γ, en symboles :

$$\Gamma \vdash \phi$$

si et seulement s'il existe une suite finie de formules de $\mathcal{L}$ telle que :
- La dernière formule de la suite est ϕ ;
- Toute formule de la suite est :
  - Soit un axiome ;
  - Soit une formule de Γ ;
  - Soit une formule dérivée des formules qui la précédent dans la suite par application d'une règle d'inférence.

On appelle une telle suite une *dérivation* de la formule ϕ à partir de Γ dans $\mathcal{S}$.

Définition 3.3. Étant donné un système formel $\mathcal{S}$ et une formule ϕ on dit que ϕ est un *théorème* de S (ou est *démontrable* dans $\mathcal{S}$), en symboles :

$$\vdash \phi$$

si et seulement s'il existe une suite finie de formules de $\mathcal{L}$ telle que :

3. Dans cette section on parle de *formules*, et pas d'*énoncés*, parce que la définition de système formel est générale et s'applique au langage propositionnel et au langage du premier ordre.

— La dernière formule de la suite est ϕ ;
— Toute formule de la suite est :
  — Soit un axiome ;
  — Soit une formule dérivée des formules qui la précédent dans la suite par application d'une règle d'inférence.

On appelle une telle suite une *preuve (formelle)* de la formule ϕ dans $\mathcal{S}$.

Donc, les formules dérivables dans $\mathcal{S}$ à partir d'un ensemble Γ sont les formules qui peuvent être dérivées des axiomes et de formules de Γ en appliquant les règles d'inférence ; les formules qui sont des théorèmes de S sont dérivables de l'ensemble vide de formules.

Une fois qu'un système formel particulier $\mathcal{S}$ a été défini pour un langage $\mathcal{L}$, il faut démontrer les deux théorèmes suivantes :

1. **Théorème de fiabilité**. Pour toute formule ϕ du langage $\mathcal{L}$, si ϕ est un théorème de $\mathcal{S}$, alors ϕ est valide. En symboles :
$$\text{si } \vdash \phi \text{ alors } \vDash \phi.$$
2. **Théorème de complétude**. Pour toute formule ϕ du langage $\mathcal{L}$, si ϕ est valide, alors ϕ est un théorème de $\mathcal{S}$. En symboles :
$$\text{si } \vDash \phi \text{ alors } \vdash \phi.$$

Le théorème de fiabilité dit que le système formel $\mathcal{S}$ démontre seulement des formules valides du langage (si une formule a une preuve, alors elle est valide) ; et le théorème de complétude affirme que toutes les formules valides sont démontrables dans $\mathcal{S}$ (si une formule est valide, j'ai une preuve pour la formule). Pris ensemble, les deux théorèmes affirment que $\mathcal{S}$ dérive toutes et seules les formules valides du langage. Donc, si on a une preuve de fiabilité et complétude pour un système formel, on sait qu'il a été défini correctement : il démontre toutes et seules les formules vraies.

Plus généralement, ce qu'on veut démontrer, pour $\mathcal{S}$ système formel, $\mathcal{L}$ langage, ϕ formule de $\mathcal{L}$ et Γ ensemble de formules de $\mathcal{L}$, sont les deux théorèmes suivantes :

3. **Théorème de fiabilité**. Si ϕ est dérivable de Γ, ϕ est conséquence logique de Γ. En symboles :
$$\text{si } \Gamma \vdash \phi \text{ alors } \Gamma \vDash \phi.$$
4. **Théorème de complétude**. Si ϕ est conséquence logique de Γ, alors ϕ est dérivable de Γ. En symboles :
$$\text{si } \Gamma \vDash \phi \text{ alors } \Gamma \vdash \phi.$$

1 et 2 sont des cas particulier de 3 et 4. 3 et 4 permettent d'établir une équivalence de la relation sémantique de conséquence logique et la relation syntactique de dérivation.

4 Systèmes formels à la Hilbert

On reporte ici un système formel $\mathcal{H}$ (pour Hilbert) pour la logique propositionnelle [4]. On prend un langage propositionnel où figurent seulement les deux connecteurs $\neg$ et

4. Pour le même langage, on peut définir différents systèmes d'axiomes.

$\rightarrow$ (les autres connecteurs propositionnelles peuvent être définis à partir de ces deux). La seule règle d'inférence est le *Modus Ponens*, et les axiomes de $\mathcal{H}$ sont les schéma d'axiomes [5] suivants :

a1. $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$
a2. $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$
a3. $(\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$

Pour démontrer que $p \rightarrow p$ (instance du principe d'identité) est un théorème de $\mathcal{H}$, il faut produire une *preuve formelle* pour cette formule. Une telle preuve se trouve sur [1], page 216.

Exemple 4.1 (Facultatif)**.** On montre que la formule $p \vee \neg p$ (instance du tiers exclu) est *dérivable* à partir de $p \rightarrow p$ (Hyp.1) et d'une instance de la loi de la double négation, $\neg\neg p \leftrightarrow p$ (Hyp.2). On défini le connecteur $\vee$ comme :

Def. $\phi \vee \psi \ =_{\mathsf{df}}\ \neg\phi \rightarrow \psi$

On note les formules dans la dérivation les unes après les autres. On note à coté de chaque formule soit le schéma d'axiome utilisé, soit les formules auxquelles on applique le *Modus Ponens*.

1.	$p \rightarrow p$	Hyp.1
2.	$\neg\neg p \leftrightarrow p$	Hyp.2
3.	$\neg p \vee p$	de 1, pour Def
4.	$(\neg\neg p \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg p)$	instance de a3, avec $\phi = \psi = \neg p$
5.	$(p \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg p)$	de 4, pour Hyp.2 (deux fois)
6.	$(\neg p \vee p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg p)$	de 5, pour Def
7.	$(\neg p \vee p) \rightarrow (\neg\neg p \vee \neg p)$	de 6, pour Def
8.	$(\neg p \vee p) \rightarrow (p \vee \neg p)$	de 7, pour Hyp.2
9.	$p \vee \neg p$	de 3 et 8, pour MP

On peut démontrer que $p \vee \neg p$ est un *théorème* de $\mathcal{H}$ (dérivable de l'ensemble vide de formules). Pour ça, il faut combiner la preuve de $p \rightarrow p$ avec la preuve de $p \leftrightarrow \neg p$ (cette dernière se trouve dans [2], page 358). ▲

Le système qu'on vient de présenter est un système formel "à la Hilbert" : il est composé de plusieurs axiomes et d'un nombre très réduit de règles d'inférences (ici, juste une). Comme conséquence, les systèmes à la Hilbert peuvent être caractérisés comme *synthétiques* : pour trouver une preuve pour un énoncé, on part d'un ensemble de vérités générales (les axiomes) et on voit si, et comment, un énoncé particulier peut être dérivé de cet ensemble. En pratique, pour tester si une formule est dérivable ou est un théorème, il faut partir des axiomes et "deviner" quelle est la bonne instance qui va nous permettre de dériver ou prouver la formule. C'est donc très difficile de construire une dérivation ou une preuve pour une formule en utilisant ce type de système formel.

5. Un schéma d'axiome est une expression du métalangage qui contient des variables pour formules (ϕ, ψ, ...). Lorsque une formule du langage est substitué à chaque occurrence de variable de formule, on obtient une formule du langage. Pour exemple, $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ est une instance du schéma d'axiome a1, pour p, q lettres de propositions.

Il existe une alternative, qui consiste à utiliser un “système formel à la Gentzen”. À partir de la prochaine séance, on va analyser en détail un de ces systèmes : la déduction naturelle. Ce système est constitué d'*aucun* axiome et plusieurs règles d'inférence. Pour dériver ou prouver une formule ϕ il faut analyser la formule et voir quelle règle d'inférence peut être appliquée à la formule. Dans ce sens, le systèmes formels “à la Gentzen” peuvent être considérés comme *analytiques* : la formule ϕ à prouver est analysé dans ses composantes plus simples, grâce aux règles d'inférence, jusqu'à quand on trouve une preuve ou une dérivation pour la formule. Comme conséquence, la construction des preuves résulte beaucoup plus simple, parce que les étapes où il faut “deviner” sont (presque totalement) éliminées.

Références

[1] Pierre Wagner. *Logique et philosophie*. Ellipses, 2014.

[2] Denis Vernant. Introduction à la logique standard. 2001.